4.2.4 La "sfericità"

Nel disegno a blocchi (ovvero per misure ripetute) gli assunti alla base dell'ANOVA sono sostanzialmente gli stessi richiesti nel caso di una ANOVA per un disegno completamente randomizzato: normalità degli "errori" ed omogeneità delle varianze. A questi se ne aggiunge tuttavia un terzo, particolarmente critico quando i blocchi sono rappresentati, ad esempio, da soggetti e i "trattamenti" da tempi distinti (che, ovviamente, in quanto tali non possono certo essere randomizzati!): la *sfericità*. Questa condizione implica che anche le varianze delle differenze tra i diversi trattamenti a confronto siano uguali fra loro. Se questa condizione non è soddisfatta, il *p-value* associato al test F è sottostimato (ovvero è più piccolo di quanto non sia in realtà). Questo implica che un test F che non risulti statisticamente significativo non ha bisogno di alcuna "correzione". Diversa è la situazione in cui il *p-value* sia inferiore a quello critico: in questo caso il *p-value* va aumentato. Sono state proposte delle "correzioni" ai gradi di libertà impiegando un fattore ε che vale 1 quando l'assunto di sfericità è soddisfatto e raggiunge un limite inferiore pari a $1/(k-1)$ (dove k è il numero di trattamenti (tempi) a confronto) nel caso di massima violazione dell'assunto di sfericità.

Il fattore di correzione $\varepsilon = 1/(k-1)$, proposto da Box (1954), è quello più penalizzante. Infatti, dal momento che i gradi di libertà per la varianza fra i trattamenti sono $k-1$, adottando questa correzione il test farà riferimento ad una distribuzione F con un solo grado di libertà al numeratore, mentre i gradi di libertà al denominatore saranno ridotti di $k-1$ volte (quindi dimezzati, nel caso "migliore", in cui i trattamenti a confronto sono tre e $\varepsilon = 1/(k-1) = 1/2$). Facciamo notare a questo proposito che, nel caso di un confronto fra due campioni appaiati $(k = 2)$, non è necessaria alcune "correzione", dal momento che $\varepsilon = 1$. Per ottenere dei *p-value* meno "conservativi" sono state proposte delle opportune statistiche per stimare il valore di ε; le più usate sono quelle di Greenhouse e Geisser (ε_{GG}) e di Huynh e Feldt (ε_{HF}).

$$F_{(k-1),(n-1)(k-1)} \quad \Rightarrow \quad F_{\varepsilon(k-1),\varepsilon(n-1)(k-1)}$$

L'applicazione di queste correzioni ai risultati dell'esempio che abbiamo precedentemente affrontato non modificherebbe il risultato dell'analisi in quanto il test F era già risultato non significativo. Per illustrare il procedimento di "correzione per la (non) sfericità" faremo ricorso ai dati contenuti nel *package* `rmf` relativi ad una indagine eseguita in Italia fra il 2005 e il 2006 volta a valutare il mutamento dei modelli di "civismo". A 946 soggetti è stato chiesto di specificare, impiegando una scala da 1 a 10, quanto erano d'accordo con le tre seguenti affermazioni:

- La scienza e la tecnologia stanno rendendo la nostra vita più sana, facile e più confortevole.
- Grazie alla scienza ed alla tecnologia ci saranno maggiori opportunità per la prossima generazione.
- Dipendiamo troppo dalla scienza e non abbastanza dalla fede.

Calcoliamo innanzitutto i punteggi medi associati a ciascuna affermazione

```
> tapply(wvs.long$score,wvs.long$aff,mean)
       A        B        C
6.326638 6.419662 6.120507
```

chiedendoci se possiamo considerare significative (al 5%) le differenze fra le tre medie.

```
> fit <- aov(score ~ aff + Error(id),data=wvs.long)
> summary(fit)

Error: id
           Df Sum Sq Mean Sq F value Pr(>F)
Residuals 945   6329   6.697

Error: Within
            Df Sum Sq Mean Sq F value  Pr(>F)
aff          2     44  22.174   4.653 0.00965 **
Residuals 1890   9008   4.766
```

Il fattore di correzione di Box nel caso in esame ($k = 3$) è $\varepsilon = 1/2$; moltiplichiamo quindi per tale valore i gradi di libertà associati al test F e calcoliamo il *p-value* "corretto"

```
> eps <- 1/2
> pf(4.653,2*eps,1890*eps,lower.tail=FALSE)
[1] 0.03125088
```

pubblicato su *R News*. La funzione `aov.mr` di `rmf` si occupa di passare a `aov.mlm` la sintassi appropriata per analizzare il disegno in parola. A differenza di `aov`, la funzione `aov.mr` vuole i dati in forma *wide* e impiega una sintassi davvero essenziale: l'unico argomento della funzione è il *data-frame* con i dati da analizzare.

```
> aov.mr(wvs.wide)
Analysis of Variance Table

Greenhouse-Geisser epsilon: 0.6786
Huynh-Feldt epsilon:        0.6792

  Res.Df Df Gen.var.      F num Df den Df   Pr(>F)   G-G Pr   H-F Pr
1    945       1.9964
2    946  1   2.0021 4.6525      2   1890 0.009647 0.020574 0.020544
```

```
> eps <- 0.6786
> pf(4.6525,2*eps,1890*eps,lower.tail=FALSE)
[1] 0.02057492
```

In modo del tutto analogo, si ottiene il *p-value* corretto secondo Huynh e Feldt

```
> eps <- 0.6792
> pf(4.6525,2*eps,1890*eps,lower.tail=FALSE)
[1] 0.02054585
```